

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 2**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

**Μονάδες 6**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $-f$  είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα  $x'x$ , της γραφικής παράστασης της  $f$

**β)** Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών  $a+βi$  και  $γ+δi$  είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

**γ)** Αν είναι  $0 < \alpha < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$

**δ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ε) Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , με  $z \neq -1$ , για τους οποίους ο αριθμός  $w = \frac{z-1}{z+1}$  είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

**B1.**  $|z|=1$

**Μονάδες 7**

**B2.** Ο αριθμός  $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$  είναι πραγματικός.

**Μονάδες 6**

**B3.**  $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$ , όπου  $z_1, z_2$  δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$

**Μονάδες 6**

**B4.** Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $u$ , για τους οποίους ισχύει  $u - ui = \frac{i}{w} - w$ ,  $w \neq 0$ , ανήκουν στην υπερβολή  $x^2 - y^2 = 1$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$xf(x) + 1 = e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ . Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η  $f$  είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2f(x) = x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

**Μονάδες 8**

**Γ4.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x) \ln(f(x))]$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  με  $A = (0, +\infty)$ , για την οποία ισχύουν:

- $f(A) = (-\infty, 0]$
- η παράγωγος της  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$ , και
- $2f(x) + \left(x + \frac{1}{x}\right) e^{f(x)} = \int_1^x e^{f(t)} f'(t) \left(t + \frac{1}{t}\right) dt + 2$ , για κάθε  $x > 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ ,  $x > 0$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)$ ,  $x > 0$

**Μονάδες 8**

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $F$  έχει μοναδικό σημείο καμπής  $\Sigma(x_0, F(x_0))$ ,  $x_0 > 0$ , το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (x_0, \beta)$  με  $\beta > x_0$ , τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $F$  στο σημείο  $M(\xi, F(\xi))$  να είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$\varepsilon: F(\beta)x - (\beta - 1)y + 2012(\beta - 1) = 0$$

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Αν  $\beta > 1$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{[F(\beta) + (1 - \beta)f(\beta)]x^5}{x - 1} + \frac{(\beta - 1)(x + 1)^3}{x - 3} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς  $x$ , στο διάστημα  $(1, 3)$

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \leq \int_1^x t f(t) dt, \quad \text{για κάθε } x > 0$$

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**